数理解析研究所講究録
166巻 1972年 77-91

作用素環の微分と自己同型写像

東工大　木島洋一　村上潔

序. Kadison - Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras" Commun. math Phys. 4, 32-63 (1967) の内容を紹介します。論文はⅠ～Ⅳの部分に分れており、Ⅰ～Ⅲは主に一般論、Ⅳは特殊例についての考察になっています。Ⅰ～Ⅲは木島、Ⅳは村上が受けもちました。

§Ⅰ～Ⅲ (一般論)

C^*-algebra の $*$-自己同型写像全体は自然な定義の仕方で位相群をなしている。この位相群の特殊な部分群として2個、それに加えて C^*-algebra の忠実な $*$-表現に関連して定義される部分群4個が考察の対象になっている。これらの部分群たちに対して、おたがいの包含関係はどうなっているか？　それらは位相的に開または閉になっているか？　それらは他の正規部分群になっているか？　などの問題に解答を与えている。

$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$を Hilbert 空間$\mathfrak{H}$上の有界線型作用素全体のつくる C^*-algebra とし、$\mathfrak{H}$上の恒等作用素を$1_{\mathfrak{H}}$で表わす。$\mathfrak{A}$は$1_{\mathfrak{H}}$を含む$\mathcal{L}(\mathfrak{H})$の C^*-subalgebra で$\overline{\mathfrak{A}}$は$\mathfrak{A}$の weak-operator closure とする。$\mathfrak{A}$上の*-自己同型写像Φに対して、

(1) Φが$\overline{\mathfrak{A}}$上の*-自己同型写像に拡張できるとき、Φは extendable であるという。

(2) $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$のある unitary operator Uが存在して$\mathfrak{A}$上で$\Phi(T)=UTU^*$と表わされるとき、Φは spatial であるという。

(3) $\overline{\mathfrak{A}}$のある unitary operator Uが存在して$\mathfrak{A}$上で$\Phi(T)=UTU^*$と表わされるとき、Φは weakly-inner であるという。

$\mathfrak{A}$の*-自己同型写像全体を$\Phi(\mathfrak{A})$で表わす。$\Phi(\mathfrak{A})$は通常の作用素の積に関して群になっている。この群の単位元は$\mathfrak{A}$上の恒等自己同型写像でこれをIで表わすことにする。さらに、$\Phi(\mathfrak{A})$は metric $\|\Phi_1-\Phi_2\|$によって位相群になる。そこで以下$\Phi(\mathfrak{A})$を位相群と考える。任意の$\Phi_1,\Phi_2\in\Phi(\mathfrak{A})$に対して$\|\Phi_1-\Phi_2\|\leq 2$、特に任意の$\Phi\in\Phi(\mathfrak{A})$に対して、$\|\Phi-I\|\leq 2$となっていることは、つぎの主要結果との関連において注目に値する。(定理の番号は原論文の番号と一致していません)

定理1. $\{\Phi_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ を $\Phi(\mathfrak{A})$ の連続1径数部分群とすれば、各 Φ_t は weakly-inner である。

定理2. $\|\Phi-I\|<2$ ならば、ある連続1径数部分群 $\{\Phi_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ で Φ を含むものが存在する。

A を単位元1をもつ C^*-algebra とする。A の $*$-自己同型写像全体を $\alpha(A)$ で表わす。まえと同様にして、$\alpha(A)$ は位相群になる。$\alpha(A)$ の単位元は A 上の恒等自己同型写像であり、これを ι で表わすことにする。いま A から $\mathcal{L}(\mathfrak{H})$ への忠実な $*$-表現 φ が与えられたとする。(つねに $\varphi(1)=1_{\mathfrak{H}}$ と仮定しておく) このとき前との関連で $\varphi(A)=\mathfrak{A}$ とおくことにすれば、A 上の任意の $*$-自己同型写像 α に対して、$\varphi\alpha\varphi^{-1}$ は $\mathfrak{A}$ 上の $*$-自己同型写像になっている。これらのことをもとにして $\alpha(A)$ のいくつかの部分群を定義する。

$\iota_o(A)$: A の内部 $*$-自己同型写像全体。

$\gamma(A)$: $\alpha(A)$ の単位元 ι の連結成分。これは位相群の定理から $\alpha(A)$ の閉正規部分群である。

$\varepsilon_\varphi(A)$: $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が extendable である α の全体。

$\sigma_\varphi(A)$: $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が spatial である α の全体。

$\iota_\varphi(A)$: $\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が weakly-inner である α の全体。

$\pi(A)$: 任意の忠実な $*$-表現 φ に対して、$\varphi\alpha\varphi^{-1}$ が weakly-inner である α の全体。このような α は π-inner または permanently weakly inner であるとよばれる。

定理3. $\{\alpha_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ を $\alpha(A)$ の連続1径数部分群とすれば、各 α_t は π-inner である。

定理4. $\|\alpha-\iota\|<2$ ならば、ある連続1径数部分群 $\{\alpha_t\}$ $(-\infty<t<+\infty)$ で α を含むものが存在する。

定理3、定理4はそれぞれ定理1、定理2の言いかえである。これらの定理から次の主要定理が得られる。

定理5. $\{\alpha : \|\alpha-\iota\|<2\} \subseteq \gamma(A) \subseteq \pi(A)$.

以上の諸定理から最初にあげた問題の解答は、それぞれ以下の定理6、定理7、定理8の形で述べられる。

定理6、 $\iota_0(A)$, $\gamma(A) \subseteq \pi(A) \subseteq \iota_\varphi(A) \subseteq \sigma_\varphi(A) \subseteq \varepsilon_\varphi(A) \subseteq \alpha(A)$。
$\iota_0(A)$と$\gamma(A)$の包含関係はさまざまの場合がある。

定理7、 $\gamma(A)$, $\pi(A)$, $\iota_\varphi(A)$, $\sigma_\varphi(A)$, $\varepsilon_\varphi(A)$は$\alpha(A)$の開かつ閉な部分群である。 $\iota_0(A)$についてはさまざまな場合がある。

定理8、 $\iota_0(A) \lhd \alpha(A)$, $\gamma(A) \lhd \alpha(A)$, $\pi(A) \lhd \alpha(A)$, $\iota_\varphi(A) \lhd \varepsilon_\varphi(A)$。一方、 $\iota_\varphi(A) \lhd \alpha(A)$, $\sigma_\varphi(A) \lhd \varepsilon_\varphi(A)$, $\varepsilon_\varphi(A) \lhd \alpha(A)$でない例がある。

補、 $\iota_0(A)$の位相的性質およびφとして universal representation を考えた場合の議論が Kadison-Lance-Ringrose "Derivations and Automorphisms of Operator Algebras. II" Journal of Functional Analysis 1. 204-221 (1967) でなされています。またφとして、reduced atomic representation を考えた場合の議論が Lance "Automorphisms of Postliminal C*-algebras" Pacific Journal Math. Vol. 23, No. 3, 1967 でなされています。

§4 特殊例

ここでは$\mathcal{A}(\mathfrak{A})$の部分群の間の包含関係について，いくつかの例を示す．

例1．あるC^*-algebra $\mathfrak{A}$に対して，二つの忠実$*$表現φとθが存在し，ある$\alpha\in\mathcal{A}(\mathfrak{A})$に対して$\alpha\in\mathcal{l}_\varphi(\mathfrak{A})$, $\theta\notin\mathcal{E}_\theta(\mathfrak{A})$となる。この時 $\mathcal{J}(\mathfrak{A})\subset\pi(\mathfrak{A})\subsetneq\mathcal{l}_\varphi(\mathfrak{A})$。

$\mathfrak{A}$: the fermion algebra

i.e. $^\exists\{M_n\}$; a family of increasing self-adjoint subalgebras of $\mathfrak{A}$ with same unit and $M_n\cong\{2^n\times 2^n\text{-matrix}\}$. and $\bigcup_{n=0}^{\infty}M_n=$ a dense subalgebra of $\mathfrak{A}$ $(M_0=I)$.

M_nの matrix units を次のように選ぶ

$E^n_{j,j}$ $(j=1,\cdots 2^n)$: orthogonal projections, $E^{n*}_{j,k}=E^n_{k,j}$

$E^n_{j,j}=E^n_{2j-1,2j-1}+E^n_{2j,2j}$; $E^n_{2j-1,1}=E^{n-1}_{j,1}E^n_{1,1}$; $E^n_{2j,2}=E^{n-1}_{j,1}E^n_{2,2}$

この時 $^\exists\alpha\in\mathcal{A}(\mathfrak{A})$ $\alpha(E^n_{j,k})=E^n_{2^n-j+1,2^n-k+1}$

又 $U_n\equiv\sum_{j+k=2^n+1}E^n_{j,k}\Rightarrow\alpha(A)=U_nAU_n^*=U_{n+1}AU_{n+1}^*$ $A\in M_n\subset M_{n+1}$

I) φ の構成

$\mathfrak{H}=L^2([0,1],m)$ (m: the Lebegue measure)

$\varphi(E^n_{j,k})$: $(\chi_{S^n_k}f)(t)\to\chi_{S^n_j}(t)f(t-\frac{j-1}{2}+\frac{k-1}{2})$ $f\in\mathfrak{H}$, $S^n_k=[\frac{k-1}{2^n},\frac{k}{2^n}]$

$\varphi(E^n_{j,k})$: partial isometry $\chi_{S^n_k}\mathfrak{H}\to\chi_{S^n_j}\mathfrak{H}$

$\varphi : \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(\mathfrak{H})$ に拡張でき、忠実な*表現となる。

$M_f \in \varphi(\mathfrak{A})$ for ${}^\forall f \in C([0,1])$, $(M_f(g) = fg \quad g \in \mathfrak{H}) \Rightarrow \varphi(\mathfrak{A})' = \mathbb{C}I$

故に φ;既約 i.e. $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^{w} = \mathcal{L}(\mathfrak{H})$

II) $\alpha \in l_\varphi(\mathfrak{A})$

$\bigvee\{\chi_{S_j^n} ; n=1,2,\cdots, j=1\cdots 2^n\}$: dense in $\mathfrak{H}$

$\varphi(U_n)(\chi_{S_j^n}) = \varphi(U_m)(\chi_{S_j^m})$ for $m \geq n$,

$\|\varphi(U_n)\| = 1$, $\varphi(U_n)^2 = I$ for ${}^\forall n$.

$\Rightarrow {}^\exists U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(w)}$ $\varphi(U_n) \to U$, $U\varphi(E^n_{j,k})U = \varphi(U_n)\varphi(E^n_{j,k})\varphi(U_n)$

故に $\varphi\alpha\varphi^{-1}(A) = UAU \quad A \in \varphi(\mathfrak{A})$

φ;既約 $\Rightarrow U \in \overline{\varphi(\mathfrak{A})}^{w}$ $\quad \therefore \alpha \in l_\varphi(\mathfrak{A})$

III) θ の構成

$\mathfrak{H}_0 = L^2([0,1), \mu)$ $\quad \mu(B) \equiv$ the number of dyadic points in B

$\theta(E^n_{j,k}) : (\chi_{T^n_k} f)(t) \longrightarrow \chi_{T^n_j}(t) f(t - \frac{j-1}{2^n} + \frac{k-1}{2^n})$ $\quad f \in \mathfrak{H}_0$, $T^n_k = [\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n})$

$\theta : \mathfrak{A} \to \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ に拡張でき、忠実な*表現になる。

$\{\chi_{\frac{j}{2^n}}(t) ; n=1,2,\cdots, j=1\cdots 2^{n-1}\}$; $\mathfrak{H}_0$ の正規直交規底

$P_{\frac{j}{2^n}} = \bigwedge_{m \geq n} \varphi(E^m_{j\cdot 2^{m-n}+1,\, j\cdot 2^{m-n}+1})$ $\quad P_{\frac{j}{2^n}}$: projection on $\chi_{\frac{j}{2^n}}\mathfrak{H}_0$

$E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}}$: partial isometry $\chi_{\frac{k}{2^m}}\mathfrak{H}_0 \longrightarrow \chi_{\frac{j}{2^n}}\mathfrak{H}_0$

$E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}} \cdot E^{\frac{j}{2^n}*}_{\frac{k}{2^m}} = P_{\frac{j}{2^n}}$ $\quad E^{\frac{j}{2^n}*}_{\frac{k}{2^m}} \cdot E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}} = P_{\frac{k}{2^m}}$.

$\varphi(E^l_{p,q}) \longrightarrow E^{\frac{j}{2^n}}_{\frac{k}{2^m}}$ (weak) as $l \longrightarrow \infty$ $\left(\begin{array}{ll} p = j\cdot 2^{l-n}+1 & l \geq n \\ q = k\cdot 2^{l-m}+1 & l \geq m \end{array}\right)$

以上より $\overline{\theta(\mathfrak{A})}^{w} = \mathcal{L}(\mathfrak{H}_0)$ $\quad$ i.e. θ;既約

IV) $\alpha \notin \mathcal{E}_\theta(\mathfrak{A})$

$\alpha(E^n_{11}) = E^n_{2^n 2^n} \quad \bigwedge_n \theta(E^n_{11}) = P_0 \quad \bigwedge_n \theta(E^n_{2^n 2^n}) = 0$

$\Rightarrow$ $\theta\alpha\theta^{-1}$ は $\overline{\theta(\mathfrak{A})}^w = \mathfrak{B}(\mathfrak{H}_0)$ に拡張できない。 i.e. $\alpha \notin \mathcal{E}_\theta(\mathfrak{A})$.

例2 $\mathfrak{l}_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$ の例を作る.

$\mathfrak{H}$: separable Hilbert space.

$\mathfrak{A} = V\{I, CC(\mathfrak{H})\} = \{aI + C : a \in \mathbb{C}, C \in CC(\mathfrak{H})\}$

$\mathfrak{A}$の既約表現は$\mathfrak{A}$を定義したものか、又は1次元表現だけである。他の表現はこれら2つのcopyの直和である。

φ: $\mathfrak{A}$の忠実*表現

$\Rightarrow \exists Q$: central projection of $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w$

$\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w(I-Q) = \{\lambda(I-Q)\}$, $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w Q$: factor of Type I.

$^\forall\alpha \in \mathfrak{d}(\varphi(\mathfrak{A}))$ $^\exists\tilde{\alpha} \in \mathfrak{d}(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w)$ $\tilde{\alpha}|_{\varphi(\mathfrak{A})} = \alpha$,

$\tilde{\alpha}$: $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w Q \longrightarrow \overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w Q$ onto, $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w(I-Q) \rightarrow \mathbb{C}$

$\Rightarrow$ $\tilde{\alpha} \in \mathfrak{l}_0(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w)$ i.e. $\alpha \in \mathfrak{l}_\varphi(\mathfrak{A})$

φ: 任意 $\Rightarrow \alpha \in \pi(\mathfrak{A})$ i.e. $\mathfrak{d}(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})$.

ここで $U \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})^{(u)}$, $U \notin \mathfrak{A}$ とする.

$\alpha(A) \equiv UAU^*$ $A \in \mathfrak{A}$ $\Rightarrow \alpha \in \mathfrak{d}(\mathfrak{A})$ $\alpha \notin \mathfrak{l}_0(\mathfrak{A})$

[注. この時 $\gamma(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A}) = \mathfrak{d}(\mathfrak{A}) = \{U \cdot U^* : U \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})^u\}$

$U = \exp iH$, $U_t = \exp itH$, $\alpha_t(\cdot) \equiv U_t \cdot U_t^*$

$\Rightarrow$ $t \to \alpha_t$: norm cont. one-parameter group in $\mathfrak{d}(\mathfrak{A})$.

$\therefore \alpha_t \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}),\quad \alpha = \alpha_1 \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}).$]

例3 あるC^*-algebraで忠実*表現ιが存在し、
$\iota_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A}) \subsetneq \iota_\iota(\mathfrak{A})$なる例を作る。

$\mathfrak{H}$: separable Hilbert space

M: factor of Type II acting on $\mathfrak{H}$ with coupring 1.

$\mathfrak{A} = \{A + C;\ A \in M,\ C \in CC(\mathfrak{H})\}$: C^* algebra.

Mの仮定より $\alpha \in \mathcal{A}(M)$ ${}^\exists U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(u)}$ $\alpha(\cdot) = U \cdot U^*$

$\alpha_0(A+C) \equiv U(A+C)U^* \Rightarrow \alpha_0 \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$.

ι; $\mathfrak{A}$を定義した$\mathfrak{H}$上えの表現 $\Rightarrow \alpha \in \iota_\iota(\mathfrak{A})$.

$\mathfrak{A}/CC(\mathfrak{H}) = M \Rightarrow \psi;\ A + C \to A$ $\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}$上えの*表現

$\varphi = \iota \oplus \psi$: $\mathfrak{A}$の$\mathfrak{H}\oplus\mathfrak{H}$上えの忠実*表現, $\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w = \mathcal{L}(\mathfrak{H}) \oplus M$

$\beta \equiv \varphi \alpha_0 \varphi^{-1}$ $\beta(\{A+C, A\}) = \{\alpha_0(A) + \alpha_0(C), \alpha_0(A)\}$ $A \in M,\ C \in CC(\mathfrak{H})$.

故に $\alpha \notin \iota_0(M) \Rightarrow \beta \notin \iota_0(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w)$ i.e. $\alpha_0 \notin \iota_\varphi(\mathfrak{A})$.

$\therefore \pi(\mathfrak{A}) \subsetneq \iota_\iota(\mathfrak{A})$.

次、$U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(u)} \cap M'$ $\|U - I\| < 1$, $U \neq \lambda I$, $|\lambda| = 1$,

$\alpha(\cdot) \equiv U \cdot U^*$, $\|\alpha - \iota\| < 2$.

定理5より $\alpha \in \mathcal{J}(\mathfrak{A}) \subset \pi(\mathfrak{A})$

一方 $\alpha \notin \iota_0(\mathfrak{A})$ $\therefore \iota_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$.

[注 この時 $\alpha \in \mathcal{A}(\mathfrak{A})$, $\alpha|_M = I_M \Rightarrow \alpha \in \mathcal{J}(\mathfrak{A})$

$\alpha|_M = I_M \Rightarrow {}^\exists U \in \mathcal{L}(\mathfrak{H})^{(u)} \cap M'$ $\alpha(\cdot) = U \cdot U^*$

$U = \exp iH$, $U_t = \exp itH$ $\alpha_t(\cdot) = U_t \cdot U_t^*$

例3の注と同様にして $\alpha \in \mathcal{J}(\mathfrak{A})$]

例4 $\alpha(\mathfrak{A})$ の部分群 $\mathcal{J}(\mathfrak{A})$, $\mathcal{L}(\mathfrak{A})$, $\pi(\mathfrak{A})$ についてその包含関係を Homotopy Theory を使って考察する。

$\mathcal{A} = C(X) = \{f : X \to \mathbb{C}, \text{ cont.}\}$ X : compact T_2-space.

$M_n = \mathcal{L}(\mathfrak{H}_n) = \{n \times n\text{-matrix}\}$ $\mathfrak{H}_n$: n-次元複素 Hilbert 空間

$\mathfrak{A} = \mathcal{A} \otimes M_n \cong C(X, M_n) = \{f : X \to M_n \text{ cont.}\}$ $\mathcal{C} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{A}'$

$\alpha_c(\mathfrak{A}) = \{\alpha \in \alpha(\mathfrak{A}) ; \alpha(A) = A, \text{ for } {}^\forall A \in \mathcal{C}\}$.

I) $\alpha_c(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})$ を示す

$\alpha \in \pi(\mathfrak{A})$, φ : $\mathfrak{A}$ の一つの忠実*表現

${}^\exists U \in \overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w$ U : unitary $\varphi\alpha\varphi^{-1}(\cdot) = U \cdot U^*$

$A \in \mathcal{C} \subset \varphi^{-1}(\overline{\varphi(\mathfrak{A})}^w \cap \varphi(\mathfrak{A})')$ $\alpha(A) = \varphi^{-1}(\varphi\alpha\varphi^{-1})(\varphi(A)) = A$.

$\therefore \alpha \in \alpha_c(\mathfrak{A})$. $\pi(\mathfrak{A}) \subset \alpha_c(\mathfrak{A})$.

逆に $\alpha \in \alpha_c(\mathfrak{A})$ とする。

$\mathfrak{A}$ の忠実*表現は $\mathcal{A}$ がその上に忠実*表現されている Hilbert space $\mathfrak{H}$ の n-直和 $\mathfrak{H}_n$ 上に作用している $\mathcal{A} \otimes M_n$ と unitary 同値である事を注意しておく。

$\{E_{j,k} ; j,k = 1, 2, \cdots, n\}$; matrix units of M_n.

$\alpha(I \otimes E_{j,k}) \equiv B_{j,k}$

$\Rightarrow$

$\alpha\left(\sum_{j,k} A_{jk} \otimes E_{jk}\right) = \sum_{jk} (A_{jk} \otimes I) B_{jk}$ $\because$ $\alpha(A_{jk} \otimes I) = A_{jk} \otimes I$

よって α (α^{-1} も) ; strong operator cont.

$\Rightarrow$ $^\exists\bar{\alpha}\in\alpha(\bar{\mathfrak{A}}^\omega)$ $(\bar{\mathfrak{A}}^\omega=\bar{\mathcal{A}}^\omega\otimes M_n)$ $\bar{\alpha}|_{\mathfrak{A}}=\alpha$.

$\bar{\alpha}(A\otimes I)=A\otimes I$, $A\in\bar{\mathcal{A}}^\omega$, $\bar{\mathfrak{A}}^{\omega\prime}=\mathcal{A}'\otimes I$

$\Rightarrow$ $\bar{\alpha}\in\iota_0(\bar{\mathfrak{A}}^\omega)$ $\because$) $\bar{\mathfrak{A}}^\omega$; Type I v. N.-alg.

$\Rightarrow$ $\alpha\in\pi(\mathfrak{A})$ (上の注意より) $\therefore$ $\alpha_c(\mathfrak{A})\subset\pi(\mathfrak{A})$

II) $\gamma(\mathfrak{A})\subset\iota_0(\mathfrak{A})\subset\pi(\mathfrak{A})$ を示す。

i) $\pi(\mathfrak{A})=\alpha_c(\mathfrak{A})\cong C(X,\alpha(M_n))=\{f: X\to\alpha(M_n) : \text{cont.}\}$

$\because$) $\alpha\in\alpha_c(\mathfrak{A})$, $\rho\in X$, $\varphi_\rho\equiv\rho(A)B$ $(A\in C(X),\ \rho(A)=A(\rho))$

$\Rightarrow$ φ_ρ : homomorphism of $\mathcal{A}\otimes M_n$ onto M_n

$B\in M_n$, $\alpha(\rho)(B)\equiv\varphi_\rho(\alpha(I\otimes B))$

$\Rightarrow$ $\alpha(\rho)\in\alpha(M_n)$ $\because$) M_n : 有限次元

$\rho\mapsto\alpha(\rho) : X\to\alpha(M_n)$: cont. (f_α と書く)

$f_\alpha\in C(X,\alpha(M_n))$

逆に $f\in C(X,\alpha(M_n))$ $f(\rho)\equiv\alpha_f(\rho)$

$B\in M_n$, $\alpha_f(\rho)B=\sum_{jk}\hat{A}_{jk}(\rho)E_{jk}$

$\Rightarrow$ $\hat{A}_{jk} : \rho\mapsto\hat{A}_{jk}(\rho)$. $X\to\mathbb{C}$ cont. i.e. $\hat{A}_{jk}\in C(X)=\mathcal{A}$.

$\alpha_f(A\otimes B)\equiv\sum_{jk}A\hat{A}_{jk}\otimes E_{jk}$

$\Rightarrow$ $\alpha_f\in\alpha(\mathfrak{A})$, $\alpha_f(A\otimes I)=A\otimes I$, $A\in\mathcal{A}$.

$\Rightarrow$ $\alpha_f\in\alpha_c(\mathfrak{A})$

ii) $U(n)=M_n^{(u)}$ $T_1=\{\lambda I_n\ ,\ |\lambda|=1\}$: the center of $U(n)$

$P : U(n)\to U(n)/T_1$: canonical map

homotopy theory から

$U(n)/T_1$: base space, $U(n)$: boundle P : projection

T_1 : fiber and group

と考えられる。

$\alpha(M_n) = \iota_0(M_n) \cong U(n)/T_1$

$\alpha \in \iota_0(\mathfrak{A})$. $\exists U_\alpha \in \mathfrak{A}^{(u)}$ $\alpha(\cdot) = U_\alpha \cdot U_\alpha^*$.

$\mathfrak{F}_\alpha(\rho) \equiv \varphi_\rho(U_\alpha) \in U(n)$

$\Rightarrow$ $\mathfrak{F}_\alpha \in C(X, U(n)) \doteqdot \{f : X \to U(n) : \text{cont.}\}$, $f_\alpha = P\mathfrak{F}_\alpha$

逆に. $\mathfrak{F} \in C(X, U(n)) = C(X, M_n)^{(u)} \cong \mathfrak{A}^{(u)}$

$\Rightarrow$ $f = P\mathfrak{F} \in C(X, U(n)/T_1) = C(X, \alpha(M_n)) \cong \alpha_c(\mathfrak{A})$

$\alpha_f(\cdot) = \mathfrak{F} \cdot \mathfrak{F}^*$, $\therefore \alpha_f \in \iota_0(\mathfrak{A})$

以上から $\iota_0(\mathfrak{A}) \cong \{f \in C(X, U(n)/T_1), \exists \mathfrak{F} \in C(X, U_n). f = P\mathfrak{F}\}$

iii) $\gamma(\mathfrak{A}) \subset \iota_0(\mathfrak{A})$ を示す

$\gamma \in \gamma(\mathfrak{A})$

$\Rightarrow$ $\exists \gamma_i(t)$; norm-cont. one-parmeter group in $\alpha(\mathfrak{A})$ $i=1,2\cdots m$.

$\gamma = \gamma_1(1) \cdots \gamma_m(1)$

$\Gamma(\rho, t) \equiv (\gamma_1(t))(\rho) \cdots (\gamma_m(t))(\rho)$: $X \times [0,1] \to \alpha(M_n) \cong U(n)/T_1$

Γ is a homotopy of γ and constant mapping $X \to T_1$

$\Rightarrow$ $\exists \bar{\Gamma}$; $X \times [0,1] \to U(n)$. cont. $P\bar{\Gamma} = \Gamma$

$\Rightarrow$ $\gamma = \Gamma(\rho, 1) = P\bar{\Gamma}(\rho, 1)$ $\therefore \gamma \in \iota_0(\mathfrak{A})$.

III) $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a}) \cong$ the group of homotopy class of $C(X, U(n)/T_1)$

$\alpha, \beta \in \pi(\mathfrak{a})$. $[\alpha]=[\beta]$ in $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a})$

$\Rightarrow$ $^{\exists}\gamma \in \gamma(\mathfrak{a})$. $\alpha = \beta\gamma$

$\Gamma(\rho, t): X \times [0,1] \to U(n)/T_1$; homotopy of γ and $\rho \to T_1$

$\beta(\rho)\Gamma(\rho, t)$: a homotopy of β and α

逆に $\alpha, \beta \in \pi(\mathfrak{a}) \cong C(X, U(n)/T_1)$. α and β are homotopic

$\Gamma(\rho, t)$: a homotopy of β and α

$\Rightarrow$ $\beta^{-1}(\rho)\Gamma(\rho, t)$: a homotopy of $\beta^{-1}\alpha$ and $\rho \to T_1$

$\Rightarrow$ $\beta^{-1}\alpha \in \gamma(\mathfrak{a})$ $\therefore$ $[\alpha]=[\beta]$ in $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a})$.

以上の事から $\gamma(\mathfrak{a}), \iota_0(\mathfrak{a}), \pi(\mathfrak{a})$ の細い包含関係を X の性質により与える事ができる。

I) X: contractive (例えば X = the unit ball in $\mathbb{C}^n$)

$\Rightarrow$ X の連続写像はすべて恒等写像と homotopic.

$\Rightarrow$ $\pi(\mathfrak{a})/\gamma(\mathfrak{a}) \cong \{0\}$. $\therefore$ $\gamma(\mathfrak{a}) = \iota_0(\mathfrak{a}) = \pi(\mathfrak{a})$.

II) $X = U(n)/T_1$ $\Rightarrow$ $\gamma(\mathfrak{a}) \subsetneq \iota_0(\mathfrak{a}) \subsetneq \pi(\mathfrak{a})$.

$\because$ $\iota: U(n)/T_1 \to U(n)/T_1$: 恒等写像 $\in C(X, U(n)/T_1) \cong \pi(\mathfrak{a})$

ここで $^{\forall}f \in C(X, U(n))$. $\iota \neq pf$

$\Rightarrow$ $\iota \notin \iota_0(\mathfrak{a})$. $\therefore$ $\iota_0(\mathfrak{a}) \subsetneq \pi(\mathfrak{a})$

次 $U(n)/T_1 \cong SU(n)/Z_n$, $SU(n) = \{A \in U(n), \det A = 1\}$

$U(n) = T_1 \times SU(n)$

q : $SU(n) \to SU(n)/T_1$ canonical map

i : $SU(n) \to U(n) \cong T_1 \times SU(n)$ $\quad i(U) = (I, U)$

s : $SU(n) \to SU(n)$ $\quad s(U) = U^n$

r $\quad SU(n)/\mathbb{Z}_n \to SU(n)$ $\quad r(U\mathbb{Z}_n) = U^n$ $\quad rq = s$

$t \equiv ir$: $SU(n)/\mathbb{Z}_n \to U(n)$ cont. i.e. $t \in C(X, U(n))$

$$\begin{tikzcd}
SU(n)/\mathbb{Z}_n \arrow[r, "t"] \arrow[dr, "r"] & U(n) \arrow[r, "p"] & U(n)/T_1 \\
SU(n) \arrow[u, "q"] \arrow[r, "s"'] & SU(n) \arrow[u, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

$\alpha \equiv pt$: $U(n)/T_1 \longrightarrow U(n)/T_1$ cont. i.e. $\alpha \in C(X, U(n)/T_1)$

α : not essential (i.e. α is not homotopic to constant map)

$\Rightarrow \alpha \notin \gamma(\mathfrak{A})$ $\quad$ 一方 $\alpha \in L_0(\mathfrak{A}) \cong \{\alpha \in C(X, U(n)/T_1),\ ^\exists t \in C(X, U(n))\ \alpha = pt\}$

III) $X = T_1 \Rightarrow \gamma(\mathfrak{A}) \subsetneq L_0(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})$

$\because$) $\pi(\mathfrak{A})/\gamma(\mathfrak{A}) = \pi_1(SU(n)/\mathbb{Z}_n) \simeq \mathbb{Z}_n$

($\pi_n(X)$: $[0,1]^n \to X$ cont. の homotopy group)

$\Rightarrow$ $^\exists \alpha_0 \in \pi(\mathfrak{A})$. $[\alpha_0] \neq [0]$ $\quad \therefore \alpha_0 \notin \gamma(\mathfrak{A})$ $\quad \therefore \gamma(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$

一方 $^\forall \alpha \in \pi(\mathfrak{A}) \cong C(T_1, U(n)/T_1)$ $\quad ^\exists \tilde{\alpha} \in C(T_1, U(n))$ $\quad \alpha = p\tilde{\alpha}$.

$\Rightarrow \alpha \in L_0(\mathfrak{A})$ $\quad \therefore L_0(\mathfrak{A}) = \pi(\mathfrak{A})$

IV) X = 2-skelton of a triangulation of P^3

$\Rightarrow \gamma(\mathfrak{A}) = L_0(\mathfrak{A}) \subsetneq \pi(\mathfrak{A})$

V) $X = S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1},\ \|x\| = 1\}$

$\mathfrak{A}_{mn} \equiv C(S^m) \otimes M_n$

$$\Rightarrow \pi(\mathfrak{A}_{mn})/\gamma(\mathfrak{A}_{mn}) \simeq \pi_m(U(n)/T_1) = \begin{cases} 0 & m : \text{even} \\ \mathbb{Z} & m : \text{odd} \neq 1 \end{cases} \quad m < 2n$$

m: even $< 2n$ の時

$\pi(\mathfrak{a}_{mn})/\gamma(\mathfrak{a}_{mn}) = 0 \quad \therefore \gamma(\mathfrak{a}_{mn}) = L_0(\mathfrak{a}_{mn}) = \pi(\mathfrak{a}_{mn})$

m: odd, $\neq 1 < 2n$ の時

$\pi(\mathfrak{a}_{mn})/\gamma(\mathfrak{a}_{mn}) = \mathbb{Z} \quad \therefore \gamma(\mathfrak{a}_{mn}) \subsetneqq \pi(\mathfrak{a}_{mn})$

又一般に $L_0(\mathfrak{a}_{mn}) = \pi(\mathfrak{a}_{mn})$ for $m, n = 1, 2, \cdots$,

∵)

$m = 1 \Rightarrow X = T_1$ III) の case

$m = 2 \Rightarrow n > 2$ の時上記より明らか. $n = 1$ の時 $U(n)/T_1 = 0$

から明らか

$m > 2$ の時 homotopy sequence

$\cdots \pi_m(T_1) \longrightarrow \pi_m(U(n)) \xrightarrow{P_*} \pi_m(U(n)/T_1) \longrightarrow \pi_{m-1}(T_1) \cdots$

は exact. $\therefore P_*$: onto isomorphism

$\Rightarrow {}^\forall \alpha \in C(\mathfrak{a}_{mn}) \cong C(S^m, U(n)/T_1)$. ${}^\exists \tilde{\alpha} \in C(S^m, U(n))$

$\alpha = p\tilde{\alpha} \quad \therefore \alpha \in L_0(\mathfrak{a}_{mn}) \quad \therefore L_0(\mathfrak{a}_{mn}) = \pi(\mathfrak{a}_{mn})$.